Iteration av kvadratiska polynom

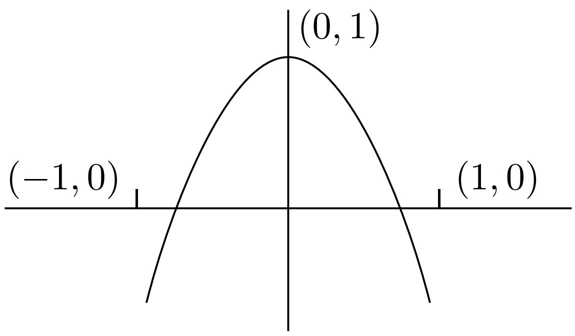
Lennart Carleson

KTH och Uppsala universitet

Inledning. Man tror gärna att matematiken är en färdig byggnad där forskarna nu för tiden bara putsar av och förfinar de gamla teorierna. Det problem vi skall diskutera visar med all tydlighet att detta är en helt fel föreställning.

Den vanliga beskrivningen av naturfenomen är genom *lineära* ekvationer. Om ekvationen ej är lineär, gör man lineära approximationer, ty dessa är de enda för vilka man har en bra teori. Genom datamaskinerna har man fått möjlighet att med räkningar och bilder studera hur *icke-lineära* ekvationer kan uppträda. Det är en sällsam värld som träder fram, se t.ex. [1], och denna är mycket närmare verkligheten än den vanliga beskrivningen. Vi skall närmare studera ett enkelt sådant problem här.

Om a är ett tal mellan 0 och 2, $0 \leq a \leq 2$, så antar funktionen $y = 1 - ax^2$ bara värden mellan -1 och 1 då x också ligger mellan -1 och 1.



Detta betyder att vi kan börja i någon punkt x_0, räkna ut $x_1 = 1 - ax_0^2$, $x_2 = 1 - ax_1^2, \ldots$ och få en oändlig följd tal $x_0, x_1 \ldots$ alla i $(-1, 1)$. Detta kallas en *iteration* av funktionen $1 - ax^2$.

1. Gör ett dataprogram som utför detta.

2. När vi har en följd $x_0, x_1, \ldots, x_n$: Gör ett dataprogram så att vi kan se hur punkterna fördelas i $(-1, 1)$, ett histogram.

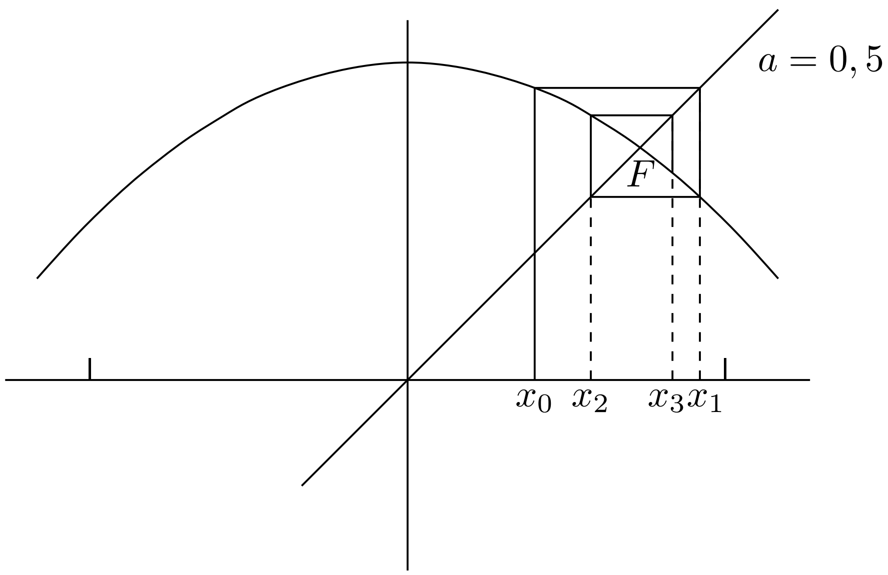
Funktion x^2 kan naturligtvis bytas mot en annan funktion. Vi skall vara intresserade av jämna, monotont växande funktioner $\varphi(x)$ med $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.

3. Gör ett program för iteration av en godtycklig sådan funktion $1 - a\varphi(x)$.

Vi återgår till $\varphi(x) = x^2$. Prova lite olika startpunkter x_0 och a–värden.

Man ser att för relativt små a, så hopar sig $\{x_n\}$ i en punkt, sedan i flera punkter och när a är över 1.5 ser det ut som en kontinuerlig fördelning, speciellt när a ligger nära 2.

Man kan åskådliggöra en iteration med följande figur



$F : 1 - ax^2 = x$ kallas fixpunkt.

Man ser att när $a < 0.75$ går spiralen in mot F. Detta beror på att $1 - ax^2$ har en derivata i F som är mindre än 1.

4. Bevisa detta: både påståendet om derivatan och att $x_0, x_1, x_2, \ldots$ då för godtycklig startpunkt närmar sig F.

5. För $a = 0.75$ är derivatan $= -1$. Vad händer nu?

När vi experimenterar ser vi att för $0.75 < a < 1.25$ så hoppar punkterna mellan två värden. Vi uttrycker detta så att punkterna $x_0, x_1, \ldots$ attraheras till en *cykel* av längd 2.

Matematiskt innebär detta att funktionen

$$f(x) = 1 - a(1 - ax^2)^2$$

har en fixpunkt:$f(x) = x$, där $|f'(x)| < 1$.

6. Bevisa att denna utsaga är sann precis för $a < 1.25$.

Vi ser också att det inte spelar någon roll hur vi väljer x_0. Följden får alltid samma uppträdande.

När vi sedan låter a växa (ganska långsamt) ser vi att först får vi en cykel av längd 4, sedan av längd 8, etc. Om vi kallar det a–värde där följden slår om från att attraheras till 2^n punkter till 2^{n+1} punkter för a_n så gäller alltså:

$$a_0 = 0.75, \;\; a_1 = 1.25;$$

a_n växer men närmar sig inte 2 utan någonstans kring 1.41 finns ett gränsvärde a_∞.

7. Gör ett dataprogram som bestämmer a_n så noggrant som möjligt.

Detta är inte helt lätt. Skillnaden mellan a_n och a_{n+1} blir snabbt liten och det fordras eftertanke att hitta på ett bra sätt att avgöra om vi närmar oss 2^n eller 2^{n+1} punkter. Programmet bör fungera upp till $n = 8 - 10$.

8. Gör upp en tabell över talen

$$b_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n}.$$

Vi ser att talen b_n ser ut att närma sig ett visst gränsvärde.

9. Byt nu ut x^2 mot $\varphi(x)$ men se till att $\varphi''(0) \neq 0$, och gör samma beräkningar av a_n och b_n.

10. Välj ytterligare en funktion $\varphi(x)$.

Du har nu upptäckt en naturkonstant av samma typ som π. På just detta sätt upptäcktes denna omkring 1980 av Feigenbaum och kallas Feigenbaums konstant. Tolkningen av experimentet är ganska djup matematik.

11. Gör nu samma experiment med x^4 och funktionen $\varphi(x)$ med $\varphi''(0) = 0$ men $\varphi^{IV}(0) \neq 0$.

Du upptäcker att vi nu får en annan konstant.

När vi sedan fortsätter att göra vårt grundexperiment för $a > a_\infty$ tenderar fördelningen av punkter att bli mer och mer kaotisk. Insprängt bland a–värden med kaotiskt uppförande finns fall med korta attraktiva cyklar.

12. Försök att hitta ett a–värde med attraktiv cykel av längd 3.

Det enda a–värde där man har en jämn fördelning av iterationspunkter är $a = 2$.

13. Gör histogram över fördelningen av punkter för $a = 2$. Vilken fördelning kan det vara?

För att lättare kunna besvara den sista frågan kan vi byta variabler. Om vi gör samma byte för både x och y betyder det bara att vi ändrar skalan. Ett lämpligt byte är

$$x = -\cos u, \quad y = -\cos v, \quad y = 1 - 2x^2.$$

14. Vilket blir sambandet mellan u och v och vilken fördelning får u–värdena? Återgå sedan till 13.

Litteratur

[1] Mandelbrot, B., *The Fractal Geometry of Nature.* W.H. Freeman förlag 1982.

[2] Benedicks, M., Periodfördubbling till kaos. *Nordisk matematisk tidskrift (NORMAT)* 31, (1983), s 60–172.