Något om algebraiska kurvor

Björn Gustafsson

K T H

Inledning. De enklaste matematiska funktionerna är de som kan definieras direkt med hjälp av de fyra räknesätten, dvs polynomen, (bara tre räknesätt behövs) och de rationella funktionerna. Det är därför rimligt att säga att till de de enklaste kurvorna i planet hör de som kan parametriseras med rationella funktioner samt (allmännare) sådana som är nivåkurvor till polynom (rationella funktioner ger inget ytterligare här). Studiet av dessa typer av kurvor och deras högredimensionella motsvarigheter kallas algebraisk geometri och är en gren av matematiken som, trots hundratals år på nacken, fortfarande är en av de mest livskraftiga och kanske t o m är extra aktuell idag på grund av helt nya tillämpningar inom modern fysik.

Denna uppgift skall ge några smakprov på algebraisk geometri med till-lämpningar.

a) Kurvan $x^2+y^2=1$ i planet ($=\mathbf{R}^2$) har som bekant en parametrisering $x=\cos t$, $y=\sin t$ (t reell parameter). Visa att det också finns en rationell parametrisering, dvs att det finns två (icke-konstanta) rationella funktioner $q(t)$ och $r(t)$ så att $q(t)^2+r(t)^2\equiv 1$. (Rationell funktion = kvot mellan två polynom. Exempel: $\frac{t^3-3t+1}{5t^2+2}$.)

b) Visa mer allmänt att varje irreducibel andragradskurva $p(x,y)=0$ är rationell, dvs kan parametriseras med rationella funktioner. (*Irreducibel* betyder att polynomet $p(x,y)$ inte kan skrivas som produkten av två polynom av lägre gradtal, inte ens om man tillåter dessa att ha komplexa koefficienter. Exempel: x^2+y^2-1 är irreducibelt men inte x^2+y^2, ty $x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)$.) Detta resultat har som konsekvens att problemet att beräkna integraler såsom

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad \int \frac{2x+1}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$$

(eller, allmänt, integraler av typen $\int r(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ där $r(x,y)$ är en rationell funktion i två variabler) kan återföras till problemet att beräkna en integral av en rationell funktion (i en variabel). Visa detta.

Ledning: Om exempelvis $\sqrt{1-x^2}$ förekommer i integranden, sätt $y=\sqrt{1-x^2}$ så att $x^2+y^2=1$ och gör variabelsubstitution till en rationell parameter i integralen.

c) Visa att kurvan $x^3+y^3=1$ (eller allmännare $x^n+y^n=1,\ n\geq 3$) *inte* är rationell. *Ledning*: Anta $\frac{p(t)}{r(t)}^n + \frac{q(t)}{r(t)}^n \equiv 1$, där p,q,r är polynom, som vi kan anta inte innehåller någon gemensam faktor. Härled först relationen

$$\frac{qr'-rq'}{p^{n-1}} = \frac{rp'-pr'}{q^{n-1}} = -\frac{pq'-qp'}{r^{n-1}}.$$

Ovanstående uttryck definierar en rationell funktion, som vi kan skriva u/v där u och v är polynom utan gemensam faktor. Härled nu en motsägelse genom att å ena sidan visa att (på grund av att $p^{n-1}, q^{n-1}, r^{n-1}$ måste innehålla v som faktor) u/v i själva verket är ett polynom (dvs $v=$ konstant) och å andra sidan visa att u:s gradtal blir strängt mindre än v:s gradtal då $n\geq 3$.

d) En punkt (x_0,y_0) på en algebraisk kurva $p(x,y)=0$ (*algebraisk* betyder att $p(x,y)$ är ett polynom) kallas singulär om (förutom $p(x_0,y_0)=0$) $\frac{\partial p}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial p}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

Här är några exempel på algebraiska kurvor som har en singulär punkt i origo.

1) $y^3=x^2+y^2$,

2) $y^3=x^2-y^2$,

3) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$,
4) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 y$.
(Hitta gärna på fler exempel själv.) Rita upp dessa kurvor och studera dem speciellt i närheten av origo. Tre av dem har egenskapen att (nästan) varje rät linje $y = tx$ (där t är en konstant) genom origo skär kurvan i precis en punkt utöver origo. Visa att detta ger upphov till en rationell parametrisering av kurvan, nämligen med t som parameter. (Den återstående kurvan är också rationell.) Denna metod att parametrisera vissa kurvor ger att varje tredjegradskurva som innehåller en singulär punkt är rationell. (Metoden kan också tillämpas på alla andragradskurvor, vilket ger en ledning till a) och första delen av b).) Kan en (irreducibel) andragradskurva ha singulära punkter?

e) Förståelsen för algebraiska kurvor ökar avsevärt om man i den tillhörande ekvationen $p(x, y) = 0$ tillåter x och y att vara komplexa tal. Till ett givet polynom $p(x, y)$ får man därvid en komplex *kurva*

$$\{(z, w) : z, w \text{ komplexa tal sådana att } p(z, w) = 0\},$$

som är en två-dimensionell mängd i ett fyr-dimensionellt rum. Man kan nu visa att en (irreducibel) algebraisk kurva $p(x, y) = 0$ är rationell om och endast om motsvarande komplexa kurva (kompletterad med vissa oändlighetspunkter) topologiskt sett är en sfär (vanligtvis mycket tillknycklad och med gott om singulära punkter där den t ex skär sig själv). Med detta (topologiskt en sfär) menas ungefär att kurvan kan deformeras kontinuerligt, utan att det någon gång uppstår brott, till en sfär. Exempel på ytor som topologiskt sett inte är sfärer är torusen, Kleins flaska eller varje icke sluten yta (alltså en yta som har kanter). Kan du inse att den komplexa kurvan $z^2 + w^2 = 1$ topologiskt sett är en sfär medan t ex $z^3 + w^3 = 1$ är en torus (jämför a) och c) ovan)? (Inte så lätt! Ta inte denna del av uppgiften alltför allvarligt, men läs gärna om ytors topologi i någon bok, t ex Sigma, band IV .)

För den som vill jobba mera:

f) Studera kurvan

$$C_a : p(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) - 2r^2(x^2+y^2) - a = 0$$

för något fixt värde på $r > 1$, t ex $r = \sqrt{2}$, och alla reella värden på a. Hur många olika sammanhängande kurvor och hur många isolerade punkter innehåller C_a för olika värden på a? För vilka värden på a ändrar C_a struktur? Kan du hitta några värden på a för vilka C_a är rationell? (För de flesta värden på a är den inte det. Vi kan upplysa om att en rationell (irreducibel) kurva inte kan innehålla mer än en sluten kurva, men kan innehålla ett flertal isolerade punkter.) Är C_a reducibel (dvs kan $p(x,y)$ faktoriseras) för några värden på a?

g) Kurvskaran i f) kan beskriva vissa fysikaliska fenomen. Om vi t ex låter r växa från noll till oändligheten och väljer a enligt

$$\begin{cases} a = -(1-r^2)^2 & \text{då } 0 \le r < 1, \\ a = 0 & \text{då } r \ge 1, \end{cases}$$

så beskriver (under lämpliga antaganden) mängderna

$$D(r) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : p(x,y) < 0\}$$

tillväxten av två grunda vattenpölar då det kontinuerligt droppar vatten i punkterna $(x,y) = (\pm 1, 0)$. (Tidsparametern blir proportionell mot r^2 vid konstant dropp-hastighet.) Rita några av mängderna $D(r)$ och studera speciellt vad som händer då r passerar värdet $r = 1$.

Litteratur

a) - f) Shafarevich, I.R., *Basic Algebraic Geometry.* Springer–Verlag 1974.

g) Anmärkning: De ”grunda vattenpölarna” avser egentligen så kallade Hele Shaw-flöden (med fria ränder).

Allmänt om Hele Shaw-flöden hittar du i

Bear, J., *Dynamics of Fluids in Porous Media.* Elsevier, New York 1972

eller i

Lamb, H., *Hydrodynamics.* Dover, New York 1932.

För det specifika exemplet i g) se

Richardson, S., Some Hele Shaw flows with time-dependent free boundaries. *J. Fluid Mech.* 102 (1981), s 263–278.