Något om metriker

Björn Gustafsson

K T H

Inledning. När man talar om avståndet mellan två punkter, t ex två orter i Sverige, så kan man mena litet olika saker, såsom avståndet fågelvägen, kortaste avståndet längs ett givet vägnät, eller den tid resan skulle ta med ett visst färdsätt (jfr enheter såsom dagsmarscher, ljusår osv). De flesta rimliga avståndsbegrepp uppfyller vissa elementära krav, som sammanfattas i matematikerns axiom för en s k metrik. Denna uppgift går ut på att studera geometriska egenskaper hos några andra avståndsbegrepp än de vi är vana vid. Trots att de grundläggande axiomen är uppfyllda så bjuds man ofta på överraskningar när man tittar närmare på geometrin. Det bör framhållas att de olika deluppgifterna nedan snarast bör ses som förslag eller idéer till vad som kan göras. Koncentrera dig gärna på någon mindre del av uppgiften och *forska* vidare i den efter eget huvud. Se också Andrejs Dunkels uppgift Om Pythagoras hade varit taxichaufför i Luleåi denna bok.

I planet, som vi identifierar med

$$\mathbf{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) : x_1, x_2 \text{ reella tal}\},$$

kan avstånd mellan punkter mätas på olika sätt. Det vanliga *euklidiska* avståndet mellan $x = (x_1, x_2)$ och $y = (y_1, y_2)$ är

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\ ,$$

som bl a har följande egenskaper (gällande för alla x, y, z).

1) $\quad d(x, y) \geq 0.$

2) $d(x,y) = 0$ om och endast om $x = y$.
3) $d(x,y) = d(y,x)$.
4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (triangelolikheten).

Rent allmänt kallas en funktion d som uppfyller 1) - 4) en *metrik* (avståndsfunktion). Några andra kandidater till metriker på $\mathbf{R}^2$ är

$$d(x,y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{1/p}$$

där p är ett positivt tal ($0 < p < \infty$), och

$$d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$

som svarar mot gränsfallet $p = \infty$.

a) Undersök 1) - 3) för dessa funktioner d ($0 < p \leq \infty$).
b) Rita upp "enhetsbollen", d v s mängden

$$B = \{x \in \mathbf{R}^2 : d(0,x) \leq 1\}$$

för några olika p–värden, t ex $p = 1/2,\ p = 1,\ p = 2,\ p = 4,\ p = \infty$.
c) Undersök om triangelolikheten gäller för $p = 1/2,\ p = 1,\ p = \infty$. (För $p = 2$ gäller den som bekant; kan du bevisa det rent algebraiskt?)
d) Triangelolikhetens gällande eller inte gällande hänger samman med en viss geometrisk egenskap hos enhetsbollen. Vilken? Med ledning av detta, eller på annat sätt, försök bestämma exakt för vilka p–värden som triangelolikheten gäller.
e) I analogi med *maxi-metriken* ovan (fallet $p = \infty$) har vi bland metrikerna med $0 < p < \infty$ också en som kan kallas *taxi-metriken* av det skälet att avståndet mellan två punkter är den sträcka en taxiförare måste köra om vi tänker oss $\mathbf{R}^2$ som en stad med ett

tätt kvadratiskt rutmönster av gator, varje gata parallell med en av koordinataxlarna. Vilken metrik är det?

f) Givet en rät linje L i $\mathbf{R}^2$ och en punkt Q utanför denna så finns det, mätt i metrikerna d ovan, alltid minst en punkt på L som ligger på kortaste avstånd från Q. För vissa p–värden finns det emellertid ibland (beroende på L:s läge) flera punkter på kortaste avstånd. Vilka p–värden är det?

g) De klassiska kägelsnitten (ellipsen, parabeln, hyperbeln) kan som bekant definieras med hjälp av enbart den euklidiska ($p = 2$) metriken: en ellips utgörs av de punkter för vilka summan av avstånden till två givna punkter är en given konstant o s v. Om vi i dessa definitioner byter ut det euklidiska avståndet mot någon av våra p–metriker (med $p \neq 2$) så får vi nya klasser av kurvor (p–*ellipser* osv). Rita några av dessa (t ex i fallen $p = 1$ och $p = \infty$). Är dessa p–ellipser osv verkligen kägelsnitt i den meningen att de uppkommer som skärningen mellan någon lämplig (icke-cirkulär) dubbelkon och plan i olika lägen? (Författaren vet ej svaret.)

För den som är trött på $\mathbf{R}^2$ följer här några uppgifter (h) - l)) på en litet annorlunda metrik.

h) Låt $\mathbf{Q}$ vara mängden av rationella tal. På $\mathbf{Q}$ definierar vi en avståndsfunktion genom

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{om } x = y \\ 1/2^k & \text{om } x \neq y, \end{cases}$$

där heltalet k bestäms ur representationen

$$x - y = 2^k \cdot \frac{m}{n},$$

där m och n är heltal som ej är delbara med 2 (alltså udda). (Observera att varje rationellt tal $x - y$ skilt från noll kan skrivas på detta sätt och att k blir entydigt bestämt.) Exempel:

$d(1/8, 11/28) = 1/2^{-3} = 8$, ty $1/8 - 11/28 = -15/56 = 2^{-3} \cdot (-15)/7$.

Beräkna $d(0, 10^{-10})$, $d(-169, 6999)$.

i) Visa att d uppfyller metrikaxiomen 1) - 3).

j) Visa att d inte bara uppfyller triangelolikheten 4) utan t o m

4') $$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}.$$

En metrik som uppfyller 4') kallas en icke-arkimedisk metrik.

k) Några lustiga egenskaper hos icke-arkimediska metriker är: alla trianglar är likbenta, dvs av de tre talen $d(x,y)$, $d(y,z)$, $d(z,x)$ så är alltid minst två stycken lika; varje punkt i en boll är medelpunkt i den, dvs om vi sätter $B(y,r) = \{x \in \mathbf{Q} : d(y,x) < r\}$ så gäller att $x \in B(y,r)$ medför $B(y,r) = B(x,r)$. Kan du bevisa dessa påståenden?

l) Kan talet 2 i definitionen av d bytas ur mot något annat tal (så att man fortfarande får en metrik)?

Litteratur

a) - g) Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley & Sons 1978.

h) - l) Koblitz, N., *p–adic Numbers, p–adic Analysis and Zeta–Functions.* GTM 58, Springer-Verlag 1977.