Något om permutationer

Lars Holst

KTH, Stockholm

1. Inledning. I många matematiska resonemang måste man räkna antalet *fall* av olika slag. Den del av matematiken som systematiskt studerar dylikt brukar kallas *kombinatorik.* Flera av de grundläggande frågeställningarna har en lång historia, men man kan nog säga att ett mera systematiskt studium påbörjades under 1600-talet, då även sannolikhetsteorin började utvecklas. Många av de klassiska resultaten i sannolikhetsteorin formulerades först rent kombinatoriskt. Avsikten med nedanstående är att ge underlag för ett specialarbete om några grundläggande resonemang och begrepp i enumerativ kombinatorik som anknyter bl.a. till klassisk sannolikhetsteori. För en fyllig och inspirerande framställning med mängder av olika exempel hänvisas till boken av Feller (1968).

2. Permutationer. *På hur många sätt kan 7 barn fördela platserna i ett sjumannalag i fotboll? Hur många olika blandningar finns av en kortlek omfattande 52 olika kort? På hur många olika sätt kan n personer sätta sig på n stolar?* Många matematiskt sett ekvivalenta formuleringar finns av dylikt, t.ex. ange antalet olika sätt som talen $1, 2, \ldots, n$ kan skrivas efter varandra på en rad. För exempelvis $n = 3$ finns de 6 möjligheterna 123, 132, 213, 231, 312, 321. Ett sådant sätt kallas en *permutation* av talen $1, 2, \ldots, n$. Antalet sådana brukar betecknas $n!$, läses *n-fakultet.* Av praktiska skäl sätter man $0! = 1$. *Vad är $n!$ uttryckt i $1, 2, \ldots, n$? Räkna ut detta antal för de två första frågorna.*

3. Binomialkoefficienter. Betrakta m nollor och $n - m$ ettor, som skrivs efter varandra på en rad i någon ordning. Detta kan även uppfattas som ett n-siffri/gt binärt tal med m nollor och $n-m$ ettor. För t.ex. $n=5$ kan man skriva upp alla $2^5=32$ olika 5-siffriga binära tal och man finner att 10 av dessa innehåller 3 nollor och 2 ettor. För det generella fallet betecknas antalet olika $\binom{n}{m}$, läses *n över m*, och kallas en *binomialkoefficient. Varför gäller rekursionen:*

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}?$$

Visa ur detta med induktion att

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Visa även detta direkt med hjälp av permutationsbegreppet.

Anta att det bara finns $m\,(\leq n)$ stolar till de n personerna. *På hur många olika sätt kan stolarna besättas?* Låt oss nu inte skilja på stolarna utan betrakta dem som helt likvärdiga. *På hur många olika sätt kan stolarna i så fall besättas?* Detta är detsamma som antalet olika sätt att välja ut de m personerna som får sitta, eller *antalet delmängder med m element från en mängd med n element* (eller antalet n-siffriga binära tal med m nollor och $n-m$ ettor).

Betrakta *Pascals triangel*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

dvs talen ”inne” i triangeln erhålls som summan av de två närmaste talen i raden ovanför. *På hur många sätt kan man ”gå” från toppen till 6 (t. ex.) om man bara får gå ”snett nedåt”? Hur hänger ovanstående resonemang med binära tal eller antalet delmängder ihop med Pascals triangel?*

Som bekant gäller att

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)...(x+y),$$

där produkten innehåller n faktorer. För att få den allmänna termen $x^k y^{n-k}$ vid hop-multiplikation tar man ur var och en av k faktorer ett x och från alla de andra ett y. *På hur många sätt kan detta göras? Vad blir b_{nk} i följande viktiga samband,*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} x^k y^{n-k},$$

det s.k. *binomialteoremet*?

Generalisera ovanstående till att man har r olika sorters objekt, m_1 av sort 1, m_2 av sort 2, etc. och totalt $n = m_1 + ... + m_r$ objekt. *På hur många sätt kan de ställas i en rad (ger s.k. multinomialkoefficienter)? Vad är koefficienten framför den allmänna termen i utvecklingen av $(x_1 + ... + x_r)^n$ (det s.k. multinomialteoremet)?* Många ekvivalenta formuleringar finns även av detta. *På hur många olika sätt kan 7 barn bilda ett fotbollslag om de inte skiljer på de 3 kedjespelarna ej heller på de 3 backarna? Hitta på andra formuleringar.*

4. Fixpunkter i permutationer. Betrakta åter personerna $1, 2, ..., n$ som sätter sig på stolarna $1, 2, ..., n$. Låt $f(i)$ beteckna numret på den stol person i sätter sig på; f kan uppfattas som en funktion med talmängden $1, 2, ..., n$ både som definitions- och värdemängd. Funktionen, som till ett givet stolsnummer tillordnar numret på den person som sitter på den, är den inversa funktionen f^{-1}. *Hur många olika sådana funktioner f finns det?*

Man säger att en permutation med tillhörande funktion f har *fixpunkten* i om $f(i) = i$, dvs om person i sätter sig på stol i. Ett klassiskt kombinatoriskt problem är att bestämma antalet permutationer som saknar fixpunkter. Låt D_n beteckna detta antal; t. ex.

genom att skriva upp alla möjliga fall finner man att $D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9$. *Visa genom lämpliga kombinatoriska tolkningar av ingående termer att*

$$D_3 = 3! - \binom{3}{1}2! + \binom{3}{2}1! - \binom{3}{3}0! = 2.$$

Observera att 3! är totala antalet permutationer av tre element. *Vad blir motsvarande formel för D_4? Generalisera detta till godtyckligt n.* Detta är ett exempel på den s.k. *inklusions-exklusions principen* i kombinatoriken.

För exponentialfunktionen e^x gäller serieutvecklingen

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

och därmed

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - +....$$

Visa att

$$D_n = \text{heltalsdelen}(\frac{n!}{e}).$$

En permutation av talen $1, 2, ..., n$ väljs slumpmässigt, dvs var och en av de $n!$ olika permutationerna har lika chans att bli vald. *Hur kan detta göras rent praktiskt?* Sannolikheten att den valda permutationen inte har någon fixpunkt är

$$P_{n0} = \frac{D_n}{n!}.$$

Varför kan P_{n0} approximeras med e^{-1} för stora n? Låt P_{nk} beteckna sannolikheten att den slumpmässigt valda permutationen har exakt k fixpunkter. *Ange en formel för P_{nk}, och visa att denna sannolikhet kan approximeras med $e^{-1}/k!$ för stora n och "fixt" k.* Detta är ett exempel på s.k. *Poisson-approximation. Undersök approximationens noggrannhet numeriskt.*

Det finns många matematiskt ekvivalenta formuleringar av ovanstående t.ex. följande: n par kommer till en fest, varje dam får en helt slumpmässigt vald herre till bordskavaljer. *Vad är sannolikheten att ingen dam har sin medhavda herre som bordskavaljer? Hitta på andra ekvivalenta formuleringar.*

Fixpunktsproblemet ovan kallas ofta *matchnings-* eller *rencontre-problemet*, se boken av Feller (1968). Det löstes omkring år 1710 i begynnelsen av kombinatorikens och sannolikhetsteorins utveckling. För bordsplaceringssituationen kan man fråga sig vad sannolikheten är för att ingen dam sitter brevid sin medhavda herre (som bekant sitter alltid bordskavaljeren till vänster om sin bordsdam). För enkelhets skull låt bordet vara runt. Detta är det s.k. *ménageproblemet*, som är svårare än det förra problemet. En intressant framställning av detta ges i Bogart and Doyle (1986). Man kan lätt tänka sig andra generaliseringar.

Referenser

[1] Bogart, K.P. and Doyle, P., Non-sexist solution of the ménage problem. *Amer. Math. Monthly* 93(1986), s 514–518.

[2] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol. 1. Third Ed. Wiley, New York 1968.