Reflektionsprincipen

Dag Jonsson

Uppsala Universitet

1. Inledning. Något om permutationer.

Exempel 1. Vi skriver bokstäverna A, B, C i rad. På hur många olika sätt kan de tre bokstäverna ordnas inbördes dvs hur många olika ord bildade av dessa tre bokstäver finns det?

Svar: Det finns 6 ordningar eller *permutationer*: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Första bokstaven kan väljas på 3 olika sätt. När första bokstaven är vald har vi 2 möjligheter för den andra bokstaven och när de båda första bokstäverna är valda finns det bara en möjlighet kvar för den tredje bokstaven.

Uppgift 1. Hur många olika permutationer av bokstäverna A, B, C, D, E finns det?

Allmänt betecknar vi antalet permutationer av n olika bokstäver med $n!$

Uppgift 2. Ge ett uttryck för $n!$ i talen $1, 2, \ldots, n$.

Exempel 2. *Kommittéproblemet.* Fem personer A, B, C, D, E sitter i en styrelse. Man vill utse en kommitté bestående av en ordförande, en sekreterare och en kassör. Hur många olika sådana kommittéer kan man bilda? Jo, det finns 5 sätt att välja ordförande. När denne är vald har vi 4 sätt att välja sekreterare och när även denne är vald finns det 3 sätt att välja kassör. Det finns alltså $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ olika sätt. Observera att detta kan skrivas på formen $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!}$.

Uppgift 3. Hur många olika kommittéer med ordförande, sekreterare, kassör och klubbmästare kan man bilda med 7 personer?

Allmänt blir antalet ordnade kommittéer av storlek k valda bland n personer

$$n(n-1)...(n-k+1) = n!/(n-k)!$$

Motivera denna formel! Antag nu att ordningen mellan kommittémedlemmarna inte spelar någon roll, dvs alla är rätt och slätt medlemmar.

Bland de 60 ordnade kommittéerna ovan hittar man t ex ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Dessa fall skiljer vi inte åt i det icke ordnade fallet. Här uttrycker ABC enbart att dessa tre bokstäver finns med. På samma sätt har vi 6 ordningar av bokstäverna A, B, D. Därför har vi 6 gånger så många kombinationer i det ordnade som i det icke ordnade fallet. Dividerar vi 60 med 6 får vi alltså 10 icke ordnade fall.

Uppgift 4. Hur många olika icke ordnade kommittéer om 4 personer kan man bilda bland 7 personer?

Allmän formel. Vi hade tidigare $\frac{n!}{(n-k)!}$ ordnade fall när k personer skulle väljas ut bland n personer. Om vi i varje kommitté om k personer bortser från ordningen reduceras antalet fall med faktorn $k!$ och vi får $n!/(n-k)!k!$ icke ordnade fall. Detta antal betecknar vi med $\binom{n}{k}$.

2. Reflektionsprincipen

Exempel 3. I ett skolval med 6 röstande har 4 elever röstat på A-partiet och 2 elever på B-partiet. Vid rösträkningen drar man en röst i taget och noterar varje gång den aktuella ställningen. På hur många olika sätt kan rösterna dras så att A-partiet hela tiden befinner sig i ledningen? Efter prövning finner vi 5 olika kombinationer: $AAAABB, AAABAB, AAABBA, AABAAB, AABABA$. För varje dragen röst har vi dragit fler A-röster än B-röster. Finns det någon allmän formel som ger antalet kombinationer med denna egenskap?

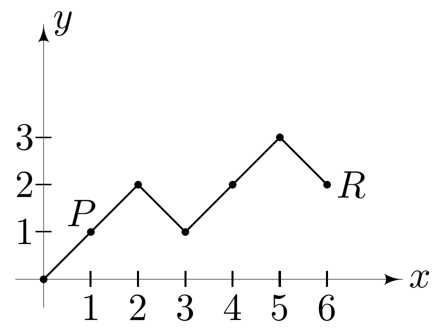
Låt oss börja med att bestämma *totala* antalet rösträkningskombinationer. Vi har 6 röster varav 4 A- och 2 B-röster. På hur många olika sätt kan de 4 A'na placeras i raden av 6 tecken?

UPPGIFT 5. Visa att detta är en variant av kommittéproblemet. Visa sedan att totala antalet kombinationer blir $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15$. Ange dessa kombinationer (5 av dem är redan givna).

Allmänna fallet. Vi har a st A-röster och b st B-röster, där $a > b$. Med $n = a + b$, $k = a$ får vi $\binom{a+b}{a}$ olika kombinationer. I hur många av dessa är A hela tiden i ledningen?

För att lösa detta problem ska vi använda oss av den så kallade *reflektionsprincipen*.
Inför ett rätvinkligt koordinatsystem med $x =$ antalet dragna röster och $y =$ differensen mellan antalet dragna A-röster och antalet dragna B-röster i ett givet skede. Vid starten befinner vi oss således i origo. Om den först dragna rösten är en A-röst, hamnar vi i punkten (1,1). Denna punkt betecknas i fortsättningen med P. Om i stället en B-röst dras hamnar vi i stället i punkten (1,-1), i fortsättningen betecknad med P'. Om de två först dragna rösterna båda är A-röster går vi via (1,1) till punkten (2,2) osv. När rösträkningen är klar ska vi tydligen befinna oss i punkten $(a+b, a-b)$, i fortsättningen betecknad med R.

För $a = 4, b = 2$ ska vi alltså förflytta oss från origo till (6,2). De fem ovan nämnda fallen motsvaras av vägar, som hela tiden förutom i origo ligger helt ovanför x-axeln. Två av vägarna är uppritade i nedanstående figur. Rita upp de tre övriga vägarna!

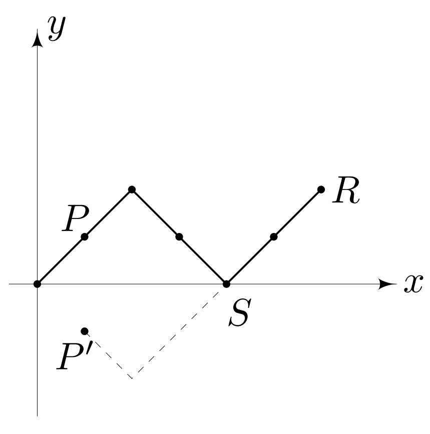


Figuren illustrerar fallen $AABAAB$ och $AAABBA$. Finns det någon allmän formel för antalet vägar av detta slag?

Först noterar vi att alla sådana vägar passerar punkten P. Låt N vara totala antalet vägar (utan krav på att de ska ligga ovanför x-axeln) från P till R.

Uppgift 6. Visa att $N = \binom{a+b-1}{a-1}$.

Betrakta vägar från P till R av icke önskat slag, dvs som når x-axeln i minst en punkt. Antag att en sådan väg når x-axeln i punkten $S = (s, 0)$. Vi bildar en ny väg genom att i x-axeln spegla det avsnitt av vägen som ligger mellan P och S medan resten av vägen, dvs den mellan S och R, sammanfaller med den gamla.



Figuren illustrerar fallen $AABBAA$ respektive $ABBAAA$.

Observera att punkten $P' = (1,-1)$ alltid ligger på en sådan (delvis) speglad väg men att den, liksom varje ursprunglig väg, alltid slutar i R.

UPPGIFT 7. Motivera varför antalet vägar mellan P och R och som når x-axeln är lika med totala antalet vägar mellan P' och R. Visa att detta antal är $\binom{a+b-1}{a}$ dvs i exemplet $= \binom{5}{4} = 5$

UPPGIFT 8. Visa att antalet vägar mellan P och R som helt ligger ovanför x-axeln är

$$\frac{a-b}{a+b} \cdot \binom{a+b}{a}.$$

Totala antalet vägar mellan origo och R är som vi tidigare konstaterat $\binom{a+b}{a}$. Antag att vi väljer en väg på måfå bland dessa möjliga vägar. Vad är då sannolikheten att vägen är av önskat slag, med andra ord vad är sannolikheten att vi vid rösträkningen hela tiden har A som ledare?

EXEMPEL 4. Betrakta följande situation. En lärare säljer kompendier för 50 kr stycket till sina 10 elever. Antag att hälften av eleverna betalar med en 50-kronorssedel medan övriga inte har mindre valör än 100 kr. Vad är sannolikheten att läraren klarar av att hela tiden ge växel tillbaka på 100-kronorssedlar om eleverna betalar i slumpmässig ordning?

UPPGIFT 9. Betrakta vägar mellan origo och punkten $(2n,0)$ på x-axeln (detta svarar mot att antalet elever är $2n$, ett jämnt heltal). Visa att av de $\binom{2n}{n}$ möjliga vägarna mellan nämnda punkter är det exakt $\frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$ vägar som ligger ovanför eller på x-axeln. Visa vidare att det är exakt $\frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1}$ vägar som ligger helt ovanför x-axeln (utom i ändpunkterna). Det senare fallet svarar mot att läraren hela tiden har reservväxel, som går åt först vid den sista betalningen.

Litteratur

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume 1.* Wiley, New York 1957 (universitetsnivå).

Honsberger, R.A., *Mathematical Gems III.* The Mathematical Association of America, 1985 (klart mera lättillgänglig än den föregående).