Konvexitet i komplexa planet

Bo Kjellberg

KTH

Som vanligt får z beteckna en komplex variabel: $z = x + iy$, alternativt $z = re^{i\theta} = r\cos\theta + i\sin\theta$. Varje z motsvarar en punkt i det komplexa planet. Beloppet av z, dvs avståndet från z till origo, är $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = r$.

Polynom, t ex $Az + B$, $Az^2 + Bz + C$, där A, B, C är komplexa konstanter, är enkla exempel på s k *hela funktioner*, definierade och deriverbara i hela planet. Av intresse här är den s k maximummodulen $M(r)$, som för en funktion $f(z)$ är maximum av $|f(z)|$ på cirkeln $|z| = r$.

Problem 1. Beräkna $M(r)$, då $f(z) = z - a, \quad a > 0$.

Lösning. $|f(z)| \leq |z| + a = r + a$, detta största möjliga värde erhålles för $z = -r$, då är ju $f = -r - a$ och sålunda $M(r) = r + a$.

Problem 2. Samma uppgift för $f(z) = (z-1)(z - ae^{i\frac{2\pi}{3}}), a > 0$.

Diskussion. Maximum av $|z-1|$ och $|z - ae^{i\frac{2\pi}{3}}|$ var för sig på $|z| = r$ fås lätt men eftersom maximumvärdena antas i olika punkter så erhåller man inte produktens maximum på detta sätt. Skriver man $z = re^{i\theta}$, räknar ut beloppen och logaritmerar, så fås

(1)

$$\ln|f(re^{i\theta})| = \frac{1}{2}\ln(r^2+1-2r\cos\theta) + \frac{1}{2}\ln(r^2+a^2-2ar\cos(\theta - \frac{2\pi}{3})).$$

Om man vill ha maximum av detta då θ varierar så kan man studera derivatan som bl a i maximumpunkten blir noll:

$$\frac{r\sin\theta}{r^2+1-2r\cos\theta} + \frac{ar\sin(\theta-\frac{2\pi}{3})}{r^2+a^2-2ar\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})} = 0. \tag{2}$$

Men den ekvationen är för svår att lösa, vi ger upp!

Vi får pröva ett annat sätt. Tag fram din räknare!

PROBLEM 3. Välj $a = 100$ och sök dig med räknarens hjälp fram till maximumvärdet $\ln M(r)$ av (1) på cirkeln $r = 10$. Vilket värde på θ svarar mot maximum?

Den franske matematikern Hadamard visade för hundra år sedan, att $\ln M(r)$ alltid är en konvex funktion av $\ln r$. Det är samma fantastiska Hadamard som Kiselman omtalar i sin artikel om primtal. Det var en stor upplevelse för mig att 1950 höra ett livfullt föredrag av Hadamard, då 85 år gammal.

Låt oss prova konvexitetssatsen på den enkla funktionen i problem 1!

Där har vi funnit, att $M(r) = r + a$, dvs, $\ln M(r) = \ln(r + a) = \ln(e^t + a)$, om man sätter $\ln r = t$. Två deriveringar med avseende på t ger

$$\frac{d^2 \ln M(r)}{dt^2} = \frac{ae^t}{(e^t + a)^2} = \frac{ar}{(r + a)^2}. \tag{3}$$

Det faktum att denna andra derivata alltid är positiv medför att $\ln M(r)$ är en konvex funktion av $t = \ln r$.

Walter Hayman, en mycket klipsk engelsman, observerade 1966 att man för varje hel funktion kan säga mer än att andraderivatan i (3) är ≥ 0. Han visade, att det finns en konstant $H_0 > 0$ sådan att det alltid finns r–värden för vilka denna andraderivata är $\geq H_0$ eller åtminstone kommer H_0 hur nära som helst.

PROBLEM 4. Sök maximum av (3) då r varierar!

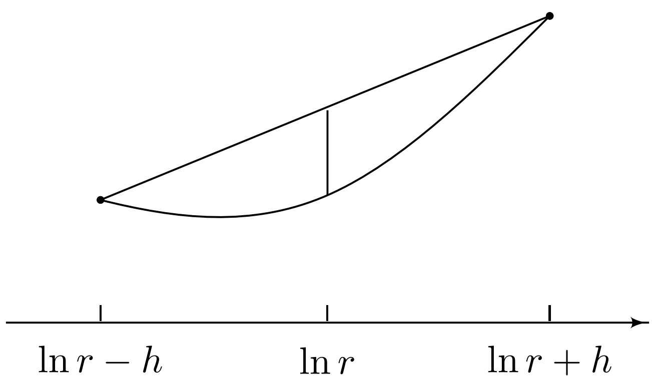
Jag gissar att du tämligen lätt får fram att uttrycket har ett maximum $0,25$ för $r = a$. Det visar att H_0 inte kan överstiga $0,25$. Hayman bevisade att $0,18 < H_0 \leq 0,25$ med gissningen $H_0 = 0,25$. Jag tyckte att saken var intressant och kunde konstruera ett exempel, ett polynom som i problem 2, som visade att $H_0 < 0,25$. Därvid valdes a i intervallet $140 < a < 180$. Andraderivatan av $\ln M(r)$ med avseende på $\ln r$ visade sig ha tre lokala maxima, nära $r = 1$, $r = \sqrt{a}$ och $r = a$. Med mycket besvär kunde jag också studera hela mängden av hela funktioner och visa att $0,24 < H_0 < 0,25$.

Det är svårt att göra exakta beräkningar i det här sammanhanget, det visar diskussionen av problem 2. Man måste i varje fall vara van vid att räkna med partiella derivator. Det finns också funktioner, där andraderivatan inte existerar för vissa r–värden, vilket fordrar ett extra resonemang.

Det finns därför anledning att åtminstone vid en första undersökning införa ett enklare mått på konvexitet. Välj ett $k > 1$ och betrakta ett intervall $(\frac{r}{k}, kr)$, logaritmiskt $(\ln r - \ln k, \ln r + \ln k)$. Ju mer $\ln M(r)$ avlägsnar sig från kordan, dvs ju större d i figuren är, desto mer konvex är $\ln M(r)$. Som mått på konvexiteten väljes därför:

$$b(r,h) = \frac{2d}{h^2} = \frac{\ln M(\frac{r}{k}) + \ln M(kr) - 2\ln M(r)}{h^2} \tag{4}$$

där för korthets skull $h = \ln k$.



Varför tages just faktorn $\frac{2}{h^2}$? Jo, den som är van vid derivator och integraler finner att $b(r,h)$ är ett medelvärde över intervallet av den andraderivata, som här diskuteras, i varje fall om den är kontinuerlig.

Om man kan få fram resultat om $b(r,h)$ kan man förmodligen senare erhålla fakta om andraderivatan.

För enkelhets skull väljes här ett enhetligt värde $k = 1,01$, dvs $h = \ln 1,01$. Med detta val skrives i fortsättningen kort $b(r)$ i stället för $b(r, \ln 1,01)$.

I analogi med den tidigare definitionen av H_0 kan man definiera en konstant H_0^1 (troligen mycket nära H_0) med egenskapen att varje hel funktion har vissa värden $b(r)$ som är $\geq H_0^1$ elller godtyckligt nära H_0^1 om alla $b(r) < H_0^1$.

Problem 5. Återgå till det enkla polynomet i problem 1 och visa, att $b(r)$ har ett maximum som är $< 0,25$, dvs $H_0^1 < 0,25$.

Problem 6. Återgå till polynomet i problem 3, beräkna också $\ln M(\frac{10}{1,01})$ och $\ln M(1,01 \cdot 10)$ samt till slut $b(10)$!

Problem 7. Betrakta $P_2(z) = (z-1)(z-ae^{i\alpha})$, $a > 0$. Bevisa att $b(\frac{a}{r}) = b(r)$. Detta resultat minskar räknearbetet om man vill ha $b(r)$ för en följd r–värden.

För några år sedan hade jag kontakt med en ung engelsman, J R. Hilditch. Han blev road av detta och räknade ut en följd av $b(r)$ i ett antal fall. Det ledde honom till gissningen att $0,246 < H_0^1 < 0,247$, vilket kan förmodas leda till att $0,246 < H_0 < 0,247$. Det vore trevligt att kunna bevisa i första hand olikheten för H_0^1.

Det som är intressant här är ju att hitta funktioner med minsta möjliga konvexitet, dvs så små värden på $b(r)$ som möjligt. Som visas i [2] måste då nollställena $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ ligga glest, kvoten $|\frac{z_{n+1}}{z_n}|$ måste vara > 25, säkert större om man gör sig besvär att undersöka saken.

Avlägsna nollställen tycks inte påverka $b(r)$ så mycket, varför studiet av enkla polynom är viktigt.

Problem 8. Försök att välja a och α i problem 7 så att du känner dig övertygad om att $b(r)$ har ett maximum $< 0,247$, vilket innebär att $H_0^1 < 0,247$.

Problem 9. Tag nu i stället ett polynom av grad 3, t ex $P_3(z) = (z-1)(z-ae^{i\alpha})(z-a^2e^{2i\alpha})$ och försök att genom lämpligt val av a och α pressa ned $b(r)$:s maximum ytterligare!

Problem 10. Möjligen är ett polynom som $P_3(z)$ det extremala, dvs man når ned till det ideala H_0^1 (och H_0 också , gissar jag). Är det så att man genom att tillfoga nollställen kan minska $b(r)$:s maximum, så är ju gissningen fel. Vill någon göra några numeriska experiment och se om de pekar i någon riktning?

Litteratur

[1] Hayman, W.K., Note on Hadamards convexity theorem. *Entire funktions and related parts of analysis.* Proc. Sympos. Pure Math., La Jolla, Calif., 1966, s 210-213. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968.

[2] Kjellberg, B., The convexity theorem of Hadamard-Hayman. *Proc. Roy. Inst. of Techn.* June 1973, s 87-114.

Kan erhållas genom hänvändelse till förf., Matem. inst., KTH, 100 44 Stockholm.