Om Möbiustransformationer

Torbjörn Kolsrud

KTH

En *Möbiustransformation* är en komplexvärd funktion f av en komplex variabel z på formen

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Här är a, b, c och d komplexa tal. Ofta skriver vi bara

$$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}.$$

Observera att om talen a, b, c och d multipliceras med ett godtyckligt komplext tal $k \neq 0$ får vi ändå samma funktion. Det betyder att en Möbiustransformation bara beror av tre parametrar.

Specialfallen $z \to az$ (en rotation om $|a| = 1$, en *homoteti* om $a > 0$), $z \to z + b$ (translation) och $z \to 1/z$ (inversion) kallas nedan för *elementära transformationer.*

1. Beräkna värdet i punkterna $z = \frac{1}{2}$, $z = i$, $z = -2i$ och $z = 1 + i$ av Möbiustransformationerna $z \to iz$, $z \to 2z$, $z \to z + 1 + i$ och $z \to 1/z$. Rita också så att du ser vad som sker under de elementära transformationerna.

Om f och g är två funktioner kan man bilda deras sammansättning $f \circ g$, definierad genom $f \circ g(z) = f(g(z))$. I allmänhet (se övning 2 nedan) är $f \circ g$ och $g \circ f$ olika funktioner.

2. Bestäm alla sammansättningar av funktionerna $z \to iz$, $z \to z + 1 + i$, $z \to 1/z$. Du ser då att också sammansättningarna är Möbiustransformationer.

3. Visa allmänt att sammansättningen av två Möbiustransformationer, säg

$$z \longrightarrow \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} = w$$

och

$$w \longrightarrow \frac{a_2 w + b_2}{c_2 w + d_2},$$

är en Möbiustransformation.

Vi är inte intresserade i de triviala fall då f är konstant, dvs då för något komplext tal α, $f(z) = \alpha$ oberoende av hur z väljs. (t ex $a = b = 1,\ c = d = 2$.)

4. Visa att f är konstant precis då $ad - bc = 0$.

Från och med nu antas alltid att $ad - bc \neq 0$.

Under detta villkor kan man lösa ut z ur ekvationen

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Vi får då vad som kallas den *inversa funktionen.* Om denna betecknas med g, gäller att $f(g(w)) = w$ för alla w och $g(f(z)) = z$ för alla z. Om det finns en invers funktion säger vi också att f är *omvändbar.* Varje Möbiustransformation är alltså omvändbar (om $ad - bc \neq 0$).

5. Kontrollera att i fallen $w = iz$, $w = z + 1 + i$ och $w = 1/z$ är också den inversa funktionen en Möbiustransformation.

6. Visa sedan detta i det allmänna fallet, helt enkelt genom att härleda en formel för z som funktion av w.

Om $c = 0$ är det klart att $|w| \to \infty$ då $|z| \to \infty$, dvs w växer obegränsat med z.

7. Visa att om $c \neq 0$ gäller att $|w| \to \infty$ då $z \to -d/c$. (Det gör du enklast genom att använda uttrycket för den inversa funktionen som härletts i övning 6.) Beräkna också gränsvärdet då $|z| \to \infty$.

Låt oss införa beteckningen $\mathbf{C}$ för de komplexa talen. Med $\hat{\mathbf{C}}$ betecknar vi $\mathbf{C}$ plus punkten ∞. Varje Möbiustransformation kan då ses som en omvändbar funktion från $\hat{\mathbf{C}}$ till sig själv. Vi definierar $f(\infty) = \infty$ om $c = 0$. För $c \neq 0$ låter vi $f(\infty) = a/c$ och $f(-d/c) = \infty$. I exemplet $f(z) = 1/z$ är således $f(0) = \infty$ och $f(\infty) = 0$.

8. Skriv Möbiustransformationerna $z \to (z+1)/z$ och $z \to (z + 2i)/(z+1)$ som sammansättningar av elementära transformationer.

9. Visa allmännare att varje Möbiustransformation kan uttryckas som sammansättning av elementära transformationer.

En av avsikterna med detta arbete är att studera Möbiustransformationers verkan på cirklar och linjer. Låt oss därför behandla ekvationerna för dessa geometriska figurer. Eftersom en cirkel består av alla punkter vars avstånd till en fix punkt z_0 är $r > 0$, är det klart att cirkeln med centrum i z_0 och radie r kan beskrivas genom ekvationen

$$|z - z_0| = r,$$

dvs

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2.$$

(På reell form blir detta, om $z = x + iy$ och $z_0 = x_0 + iy_0$, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.)

Varje linje i planet kan skrivas på formen $Ax + By + C = 0$, där A, B och C är reella tal, och där något av A och B är $\neq 0$.

10. Visa att ekvationen för en linje kan uttryckas med komplexa tal som

$$\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \beta = 0,$$

där $\alpha \neq 0$ är ett komplext och β ett reellt tal.

11. Bestäm bilden av linjen $x - y + 1 = 0$ under transformationerna $z \to z + 1$, $z \to 1/z$ och $z \to (z+1)/z$.

12. Låt allmännare L vara en cirkel eller en linje och låt f vara en Möbiustransformation. Visa med hjälp av resultaten ovan att bilden av L under f, $f(L) = \{w : w = f(z), z \in L\}$, också är en cirkel eller en linje.

Vi har tidigare sett att en Möbiustransformation bara beror på tre parametrar. Det förefaller därför klart att varje Möbiustransformation är bestämd av att det för tre olika punkter z_1, z_2 och z_3 gäller att $z_1 \to 0$, $z_2 \to 1$, $z_3 \to \infty$. Vi ska nu visa detta.

13. a) Kontrollera att om ingen av z_1, z_2, z_3 är ∞, så gäller detta för funktionen

$$f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1},$$

och, om z_1, z_2 eller z_3 är ∞, för

$$\frac{z_2 - z_3}{z - z_3} \quad , \quad \frac{z - z_1}{z - z_3} \quad \text{resp.} \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

att $z_1 \to 0,\ z_2 \to 1,\ z_3 \to \infty$.

b) Låt f vara som i a) och anta att också g uppfyller $z_1 \to 0$, $z_2 \to 1$, $z_3 \to \infty$. Om h är den inversa funktionen till g, så gäller för $f \circ h$ att $0 \to 0$, $1 \to 1$ och $\infty \to \infty$. Vilka Möbiustransformationer uppfyller detta? Vilken slutsats dras om g?

Funktionen $f(z)$ i 13a) skrivs ofta (z, z_1, z_2, z_3) och kallas för korskvoten. Denna kan användas för att hitta en Möbiustransformation som avbildar tre givna distinkta punkter z_1, z_2, z_3 på tre andra distinkta punkter w_1, w_2, w_3. Om $f(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ och g är inversen till $w \to (w, w_1, w_2, w_3)$ gäller för $g \circ f$ att $z_1 \to 0 \to w_1$, $z_2 \to 1 \to w_2$ och $z_3 \to \infty \to w_3$.

Vitsen med detta är att man, givet två områden, båda begränsade av en cirkel eller en linje, kan finna en Möbiustransformation som överför det ena området i det andra. Anta t ex att det gäller två halvplan, begränsade av linjerna L resp M. Tag två punkter z_1, z_2

på L och anta att en Möbiustransformation f avbildar z_1 på w_1 och z_2 på w_2 där $w_1, w_2 \in M$. Linjerna L och M delar z– resp w–planet i två delar. Av kontinuitetsskäl är det klart att alla punkter i ”ena halvan” av z–planet hamnar i samma halva av w–planet. Det räcker därför att välja punkter z_3 och w_3 i de ursprungliga halvplanen och ordna så att också $z_3 \to w_3$.

14. Finn en Möbiustransformation som avbildar

a) halvplanet $\{y < -1\}$ på halvplanet $\{x - y > 1\}$,

b) cirkelskivan $\{|z| < 1\}$ på cirkelskivan $\{|z - 1 + i| < 3\}$,

c) cirkelskivan $\{|z| < 1\}$ på området $\{|z - 1 + i| > 3\}$ (en ”yttre cirkelskiva”),

d) cirkelskivan $\{|z| < 1\}$ på halvplanet $\{y > 0\}$.

15. a) Låt L vara reella axeln. Kolla att $z \to (az + b)/(cz + d)$ avbildar L på L precis när a, b, c och d är reella, om vi också antar att $ac - bd$ är reell.

b) Låt H vara övre halvplanet $\{y > 0\}$. I vilket av fallen $ac - bd > 0$, resp < 0, gäller att H avbildas på sig självt?

Betrakta alla Möbiustransformationer

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

där a, b, c, d är *heltal* $(0, \pm 1, \pm 2 \dots)$ och $ad - bc = 1$. Vi skriver då $f \in \Gamma$.

16. Kontrollera att om f och $g \in \Gamma$ gäller också $f \circ g \in \Gamma$. Visa också att varje $f \in \Gamma$ har en invers funktion som tillhör Γ. (Detta betyder att Γ är en *grupp*.)

Två transformationer i Γ är

$$f_1 : z \to z + 1$$

med invers funktion

$$g_1 : z \to z - 1,$$

och

$$f_2 : z \to -1/z$$

som är sin egen invers. Man kan visa att varje $f \in \Gamma$ kan fås genom sammansättningar av f_1, g_1 och f_2. Vi säger att de *genererar* Γ.

17. Visa att

a) $g(z) = \frac{-1}{z+1} = f_2 \circ f_1(z)$,

b)$-(1 + 1/z) = g \circ g(z)$,

c) $\frac{z}{z+1} = f_1 \circ f_2 \circ f_3(z)$.

Låt F vara ett område i H. F kallas för ett *fundamentalområde* (för Γ) om varje punkt w i H är bild av en punkt z i F under en lämplig sammansättning av f_1, g_1 och g_2.

18. Visa att $|z| \geq 1$, $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$ är ett fundamentalområde.

19. Anta nu att vi ersätter Γ med Γ', där Γ' har funktionerna f_2 (som ovan), $f_3 = f_1 \circ f_1 : z \to z + 2$ och $g_3 = g_1 \circ g_1 : z \to z - 2$ som generatorer. Kan du då finna ett fundamentalområde, F' säg, för Γ'?

20. Vad händer om du har kvar f_3 och g_3, men ersätter f_2 med $f_4(z) = z/(z + 1)$ och dess invers $g_4(z) = z/(-z + 1)$?

Litteratur

Brinck, I.–Persson, A., *Elementär teori för analytiska funktioner.* Studentlitteratur 1967.