Myntveksling

Dan Laksov

KTH, Stockholm

Beskrivelse av oppgaven. Denne oppgaven kan behandles helt eksperimentelt. Den egner seg imidlertid best som et samspill mellom eksperimenter (på dator eller for hånd) og teoretiske betraktninger. Teorien som kan brukes hentes mest fra elementær tallteori og ligger vel innenfor hva Du kjenner til fra læreboken. Metoder som kjedebrøk, rekursjonsformler, kombinatorikk, ... kan også anvendes. En grundig gjennomgang av den første delen av oppgaven (de eksperimentelle delene av a–n nedenfor) burde Du klare om Du er interessert i matematikk og dette burde rekke for en spesialoppgave. Man kommer imidlertid fort frem til forskningsfronten og kan finne en lang rekke tiltalende, men vanskelige problemer i nær tilknytning til dette stoffet. Vi har nevnt noen av dem i slutten av oppgaven.

Den kjente tyske matematikeren F.G. Frobenius (1849–1917) fremhevet ofte at problemstillingene vi tangerer i denne oppgaven er interessante og oppstår naturlig i mange ulike sammenhenger i matematikken og i anvendelser. Han var imidlertid klar over at problemet i full generalitet var meget vanskelig og at man ikke kan vente å finne eksplisitte uttrykk for de tallene man betrakter. På grunn av disse vanskelighetene har dette området aldrig blitt sentralt i matematikken, men det har fascinert en lang rekke matematikere.

Problemet. I et land har de bare to myntsorter. Den ene av valøren $a = 5$ (kroner, dollar, pund, lire, ...) og den andre av valøren $b = 9$. Din oppgave er å finne hvilke priser man kan sette på varene i landet for at man skal kunne betale varen med et eksakt antall mynter.

a. Vis at man kan betale følgende beløp

$$5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 28,$$
$$29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, \ldots.$$

Fortsett tabellen. Ser Du noe mønster?

b. Kan Du vise at varene i landet kan ha prisen 32 og alle høyere priser? Hint, det rekker å vise at man kan betale 5 priser som følger etter hverandre med en differens på en enhet.

c. Hold myntsorten a fast og prøv med noen andre verdier av myntsorten b f.eks. $b = 1, b = 2, \ldots, b = 10$. Bestem i hvert tilfelle den største prisen Du *ikke* kan betale. Ser Du noe mønster?

Dersom det finnes en største pris Du *ikke* kan betale betegner Du denne prisen med $g(a, b)$. Du kan altså betale alle priser $g(a, b) + 1, g(a, b) + 2, g(a, b) + 3, \ldots.$ F.eks. er $g(5, 9) = 31$.

d. For hvilke av myntsortene du prøvet i del (c) ovenfor eksisterte $g(5, b)$ og hva er verdien av $g(5, b)$? Ser Du noe mønster? Kan Du gjette når $g(5, b)$ eksisterer for vilkårlige b? Kan Du gjette en enkel formel for $g(5, b)$ uttrykt ved b?

e. Prøv å bevise gjetningene fra punkt d.

Et annet viktig tall er antallet priser Du ikke kan betale. I tilfellet $a = 5$, $b = 9$ kunne du ikke betale prisene

$$1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 21, 22, 26, 31,$$

det vil si 16 priser.

Når $g(a, b)$ eksisterer betegner vi med $n(a, b)$ antallet priser vi *ikke* kan betale. F.eks. $n(a, b) = 16$.

f. Bestem $n(5, b)$ for de myntsortene du eksperimenterte med i del c. Kan Du gjette hva $n(5, b)$ er for vilkårlig b? Kan Du vise at Din gjetning er sann?

g. Eksperimenter med å finne $g(a,b)$ for ulike verdier av a og b. Kan Du gjette for hvilke par av tall a,b tallet $g(a,b)$ eksisterer. Kan Du gjette en enkel eksplisitt formel for $g(a,b)$ uttrykt ved a og b? Bestem også $n(a,b)$ og prøv å gjette en enkel formel for dette tallet uttrykt ved a og b.

h. Kan Du bevise gjetningene Du gjorde i del g?

Mer hjelp med problemene a til h kan Du finne i [1] i referenselisten.

Dersom landet har 3 myntsorter a,b og c kan man stille samme spørsmål, men disse er mye vanskeligere å svare på. Vi betegner med $g(a,b,c)$ det største tallet som *ikke* kan veksles, når dette finnes, og med $n(a,b,c)$ antallet priser som ikke kan veksles.

i. Eksperimenter med tre myntsorter, f.eks. ved å la a og b være som i første del av oppgaven og variere c. Bestem $g(a,b,c)$ og $n(a,b,c)$ i disse tilfellene.

j. Kan Du ved å starte med tilfellet med 2 myntsorter vise for hvilke myntsorter a,b og c tallet $g(a,b,c)$ eksisterer?

k. Kan Du av eksperimentene i del i gjette en øvre grense for $g(a,b,c)$ når denne eksisterer? F.eks. kan Du undersøke om $g(a,b,c) \leq abc$ når $g(a,b,c)$ finnes. Kan Du finne bedre grenser?

l. Her har Du en tabell over noen kjente øvre grenser for $g(a,b,c)$ når vi har $a < b < c$:

T. Skolem (1930)	$(a-1)(b+c-1)-1$
I. Schur (1935)	$(a-1)(c-1)-1$
A. Brauer (1942)	$ab/d + dc - a - b - c$, der d er største felles divisor til a og b
M. Lewin (1972)	$[(c-2)^2/2]-1$

M. Lewin (1973) $[\frac{1}{2}(c-2)(b-2)]-1$
J. Roberts (1956) $a(c-a-2+[a/(c-a)])+(b-a-1)(c-a-1)$
Y. Vitek (1975) $(c-2)\lfloor \frac{a}{2}-1\rfloor$ for a,b,c inkongruente (mod a)

Sett inn i formlene for en del verdier av a,b og c og sammenlign med den virkelige verdien for $g(a,b,c)$. Grensene ovenfor og referenser til originalarbeidene kan Du finne i [3].

m. Kan Du finne noe samband mellom tallene $g(a,b,c)$ og $n(a,b,c)$?

Det er ganske komplisert å finne eksplisitte uttrykk for $g(a,b,c)$ og $n(a,b,c)$ når disse finnes. Slike uttrykk ble først funnet for noen år siden og er ganske involverte. I [2] i litteraturlisten er endel av dette arbeidet beskrevet og Du kan der finne videre referenser til annen litteratur om Du er interessert.

n. Kan Du si noe om eksplisitte uttrykk for $g(a,b,c)$ og $n(a,b,c)$. Kanskje Du kan bestemme eksplisitte uttrykk for spesielle verdier av a,b og c, som f.eks. $b=a+d$ og $c=a+2d$ for noe heltall d?

For fire og flere myntsorter er Du ved *forskningsfronten.* Kan Du si noe i dette tilfellet?

Litteratur

[1] Gardiner, A., *Discover Mathematics.* Oxford Science Publ. 1987.

[2] Selmer, E.S., To populære problemer i tallteorien. I Myntveksling, II Frankering. *Normat* 29 (1981).

[3] Smoryński, C., Skolem's solution to a problem of Frobenius. *The mathematical intelligencer* 3 (1981), s 123–132.

[4] Vitek, Y., *Bounds for a linear diophantine problem of Froebenius, II.* Canad. J. Math. 28 (1976), s 1280–1288.