Matrisavbildningar

Kirsti Mattila

K T H

1. Inledning. I denna uppgift betraktas matriser som avbildningar på planet $\mathbf{R}^2$; speciellt betraktas projektioner och isometrier. En projektion är en avbildning P som uppfyller villkoret $P(P(x, y)) = P(x, y)$ för varje vektor (x, y). Till exempel är $P(x, y) = (x, 0)$ en projektion som projicerar punkterna i planet på x–axeln och $Q(x, y) = (x, x/2)$ en projektion som projicerar punkterna på linjen $y = x/2$.

Vi betraktar två olika normer (längder) i planet, den euklidiska normen $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ och maximumnormen $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$. De punkter i planet som har längden ett är punkterna på enhetscirkeln om normen är den euklidiska normen och punkterna på en kvadrat med hörn $(\pm 1, \pm 1)$ om normen är maximumnormen.

I uppgiften skall bestämmas de projektioner som inte förlänger vektorer (kontraktiva projektioner). Om normen i planet är maximumnormen, så gäller för projektionen Q ovan att

$$\|Q(x, y)\| = |x| \leq \|(x, y)\|,$$

alltså normen ökar inte. Men om normen är den euklidiska normen, så är till exempel

$$\|Q(1, 0)\| = \|(1, 1/2)\| = \sqrt{5}/2 > 1 = \|(1, 0)\|.$$

En isometri är en avbildning som förvarar längden av varje vektor. Till exempel $T(x, y) = (-y, x)$ är en isometri med avseende på båda normerna. Om normen är den euklidiska normen, så finns det en kontraktiv projektion på varje endimensionellt delrum och det finns oändligt många isometrier. Dessa resultat gäller inte om normen är maximumnormen.

2. Om normer och matriser. En *norm* (eller längd) av en punkt eller vektor X är ett tal $\|X\|$ som uppfyller de följande villkoren:

$$(1) \qquad \begin{cases} \|X\| \geq 0 \text{ och om } \|X\| = 0, \text{ så är } X = \bar{0}. \\ \|\alpha X\| = |\alpha| \|X\| \text{ för varje reellt tal y } \alpha. \\ \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \quad \text{(triangelolikhet).} \end{cases}$$

Den vanligaste normen i planet är den euklidiska normen

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

UPPGIFT 1. Visa att den euklidiska normen uppfyller villkoren (1).

Maximumnormen är

$$\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\} \ .$$

UPPGIFT 2. Visa att maximumnormen är en norm.

I det följande talar vi om *rummet E* när normen i $\mathbf{R}^2$ är den euklidiska normen och om *rummet Y* när normen är maximumnormen.

En *matris* är ett rektulangulärt schema av reella tal. Vi behöver kvadratiska matriser $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och kolonnmatriser $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Vi nämner här några egenskaper av matriser. Mera om matriser kan man läsa i referens [2].

Matriserna $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ är *lika*, d v s

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \quad \text{om} \quad a = a',\ b = b',\ c = c' \quad \text{och} \quad d = d'.$$

Motsvarande gäller för kolonnmatriser. Matriser av samma form kan adderas enligt följande

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}$$

och

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' \\ b+b' \end{bmatrix} .$$

Multiplikationen av matriser definieras på följande sätt:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bf \\ ce+df \end{bmatrix} .$$

Vi skriver $AA = A^2$ om A är en kvadratisk matris. Matriserna

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kallas för *identitetsmatrisen* respektive *nollmatrisen.* För varje kvadratisk matris B gäller att

$$IB = BI = B \quad \text{och} \quad \bar{0}B = B\bar{0} = \bar{0} .$$

En kvadratisk matris P är en *projektion* om $P^2 = P$.

UPPGIFT 3. a) Visa att identitetsmatrisen och nollmatrisen är projektioner.

b) Visa att om P är en projektion, så är $I - P$ också en projektion.

UPPGIFT 4. Bestäm alla projektioner.

En matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ kan uppfattas som en avbildning (funktion) på $\mathbf{R}^2$ som avbildar punkten (x, y) på punkten $(ax+by, cx+dy)$. Vi skriver

$$A(x, y) = (ax + by, cx + dy) \quad \text{för varje talpar} \quad (x, y)$$

eller på matrisform

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{för varje kolonnmatris } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Om $\| \ \|$ är en norm i $\mathbf{R}^2$, så kan man definiera en *matrisnorm* genom

$$(2) \qquad \|A\| = \max\{\|(ax+by, cx+dy)\| : \|(x,y)\| = 1\}$$

där $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Vi kan också skriva

$$\|A\| = \max\{\|AX\| : \|X\| = 1\}$$

där normen av en kolonnmatris $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ är $\|X\| = \|(x,y)\|$. Speciellt gäller att $\|I\| = 1$.

UPPGIFT 5. Visa, att om $\| \ \|$ är en norm i $\mathbf{R}^2$, så uppfyller motsvarande matrisnorm (2) villkoren (1).

UPPGIFT 6. Visa, att om P är en projektion, så gäller det att

$$\|P\| \geq 1 \quad \text{om} \quad P \neq \bar{0}.$$

En *isometri* på planet $\mathbf{R}^2$ med en norm $\| \ \|$ är en matris T som uppfyller villkoret

$$\|TX\| = \|X\| \quad \text{för varje kolonnmatris} \quad X.$$

3. Maximumnormen. Om normen i $\mathbf{R}^2$ är maximumnormen $\|(x,y)\| = \max\{|x|,|y|\}$, så kan motsvarande matrisnorm (2) av en matris $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uttryckas på ett enkelt sätt som en funktion av matriselement a, b, c och d.

UPPGIFT 7. Bestäm matrisnormen i rummet Y.

UPPGIFT 8. a) Bestäm alla de projektioner på rummet Y som uppfyller villkoret (villkoren)

(i) $\|P\| = 1$ (kontraktiva projektioner)

(ii) $\|P\| = \|I - P\| = 1$ (bikontraktiva projektioner).

b) Beräkna $\|I - 2P\|$ för de bikontraktiva projektionerna.

UPPGIFT 9. Bestäm alla isometrier på rummet Y.

4. Den euklidiska normen.

UPPGIFT 10. Bestäm matrisnormen i rummet E.

(Ledning: Om $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$, sätt $x = \cos t$, $y = \sin t$ och bestäm det största värdet av funktionen

$$f(t) = \|A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\|^2 = \|A \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}\|^2, \quad 0 \le t \le 2\pi.)$$

Om A är matrisen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, så kallar vi mängden

$$V(A) = \{(ax + by, cx + dy) : x \text{ och } y \text{ är reella tal}\}$$

värdemängden för A.

UPPGIFT 11. Visa att $V(I) = \mathbf{R}^2$ och

$$V\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{(0, y) : y \text{ är reellt tal }\} = y\textit{–axeln}.$$

UPPGIFT 12. a) Bestäm alla projektioner P på E som uppfyller villkoret $\|P\| = 1$. Beräkna sedan $\|I - P\|$ för dessa projektioner.

b) För varje reellt tal k bestäm projektionen P_k så att $\|P_k\| = 1$ och att värdemängden för P_k är linjen $y = kx$.

c) Vilken mängd är $V(I - P_k)$?

UPPGIFT 13. Bestäm alla isometrier på E.

Egenvärden till en matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är nollställen till polynomet

$$p(x) = (a - x)(d - x) - bc,$$

d v s egenvärden är lösningar till ekvationen $p(x) = 0$.

Matrisen $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ är den till A *transponerade* matrisen.

UPPGIFT 14. Beräkna egenvärdena till matrisen $A^t A$. Om λ är den större av egenvärdena, visa att

$$\|A\| = \sqrt{\lambda},$$

där $\|A\|$ är matrisnormen i E (Uppgift 10).

Litteratur

Matrisnormen i Y (Uppgift 7) finns i boken

[1] Faddeev, D.K. och Faddeeva, V.N., *Computational Methods of Linear Algebra.* Freeman 1963.

[2] Lang, S., *Linear Algebra.* Addison Wesley 1972.

Om matrisavbildningar i (oändligtdimensionella) normerade rum kan man läsa i

[3] Taylor, A.E., *Introduction to Functional Analysis.* Wiley 1958.