Stokastisk geometri

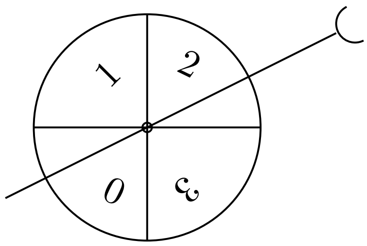
Lennart Råde

Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet

Inledning. I geometrin studerar man geometriska objekt och deras inbördes relationer. Exempel på geometriska objekt är räta linjer, sträckor, trianglar, cirklar osv. Även i den stokastiska geometrin studerar man geometriska objekt men nu är dessa slumpmässiga (stokastiska), dvs de genereras av en slumpmekanism. Den stokastiska geometrin har stor aktualitet bl a på grund av en mångfald tillämpningar t ex inom fysik, biologi, teknik osv.

Det är ofta svårt att lösa problem i den stokastiska geometrin analytiskt dvs med penna och papper. Man använder därför ofta simulering, i allmänhet med hjälp av en dator. Man utgår härvid från *slumptal* mellan 0 och 1, som datorn bildar med hjälp av en slumptalsgenerator. Man behöver i allmänhet inte programmera datorn att bilda slumptal. De flesta programmeringsspråk innehåller nämligen en instruktion, som bildar slunptal mellan 0 och 1 med en slumptalsgenerator. I t ex BASIC är instruktionen ”RND” en sådan instruktion, och vidare gäller att instruktionen ”RANDOMIZE” ger slumptalsgeneratorn en slumpmässig start. För att genomföra det här specialarbetet behöver Du ha tillgång till en dator. Det går utmärkt med en fickdator (programmerbar miniräknare).

Inledande uppgifter. Som en inledning ges här några uppgifter, som egentligen ej hör hemma i den stokastiska geometrin, även om de har geometrisk anknytning. Men de ger en nyttig bakgrund till de följande uppgifterna.



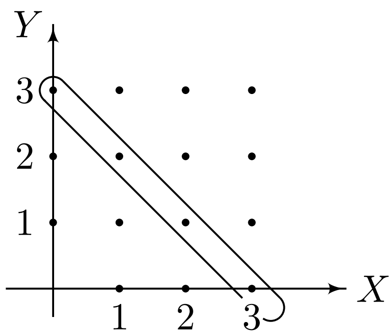
Figur 1

Man kan i BASIC simulera spel på lyckohjulet i figur 1 med hjälp av instruktionen $INT(4 * RND)$, där INT betecknar heltalsdel, t ex $INT(\pi) = 3$, $INT(6,51) = 6$.

UPPGIFT 1. Utforma ett program, som t ex 1000 gånger upprepar försöket att spela två gånger på lyckohjulet i figur 1 och varje gång beräknas summan $X + Y$ av de båda erhållna poängantalen X och Y. Beräkna också medelvärdet av de erhållna observationerna av $X + Y$ och sammanställ dessa i en frekvenstabell. Givetvis kan programmet utformas så att datorn beräknar medelvärde och gör sammanställningen i frekvenstabell.

UPPGIFT 2. Beräkna väntevärde för det simulerade försöket i uppgift 1. Med väntevärde för ett slumpmässigt försök menas summan av produkterna av försökets utfall och sannolikheterna för dessa utfall. För t ex försöket att kasta en symmetrisk tärning är väntevärdet

$$\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3.5$$

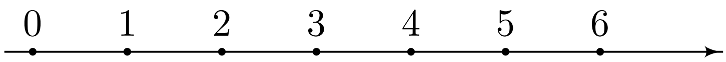


Figur 2

Av figur 2 framgår att t ex sannolikheten är $4/16$ för att summan av X och Y är 3.

Uppgift 3. Upprepa gärna uppgifterna 1 och 2 men för symmetriska lyckohjul med utfallen $\{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$ med t ex $N = 5, 6$ och 7. Härled eventuellt en formel, som ger väntevärdet för godtyckligt värde på N.

Slumpmässiga punkter på sträcka.



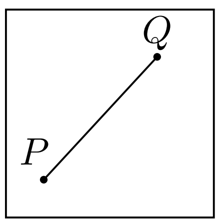
Figur 3

På en sträcka av längden 6 har 7 punkter markerats symmetriskt enligt figur 3. Betrakta försöket att slumpmässigt välja två av dessa punkter och bestämma avståndet L mellan de valda punkterna. Man förutsätts ej kunna välja samma punkt båda gångerna så att avståndet L kan inte vara 0.

Uppgift 4. Simulera t ex 1000 upprepningar av detta försök och ge frekvensfördelning och medelvärde för de observerade avstånden. Beräkna också väntevärdet.

Uppgift 5. Upprepa gärna uppgift 4 för en sträcka av längden N med $N+1$ symmetriskt markerade punkter för t ex $N = 7, 8, 9, 10$.

Slumpmässiga punkter i kvadrat.



Figur 4

Betrakta försöket att slumpmässigt välja två punkter P och Q i en kvadrat med sidan 1 och sedan beräkna längden av sträckan PQ.

UPPGIFT 6. Simulera t ex 1000 gånger detta försök och beräkna medelvärde av längderna av de observerade sträckorna PQ. Med integralkalkyl kan man visa att väntevärdet av PQ är

$$\frac{2+\sqrt{2}}{15}+\frac{1}{3}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Jämför det observerade medelvärdet och väntevärdet.

UPPGIFT 7. Upprepa uppgift 6 men nu under förutsättning att punkterna P och Q väljs slumpmässigt i en kub. I detta fall är väntevärdet

$$\frac{17\sqrt{2}}{105}-\frac{2\sqrt{3}}{35}+\frac{4}{105}+\frac{2}{5}\ln(2+\sqrt{3})+\frac{1}{5}\ln(1+\sqrt{2}).$$

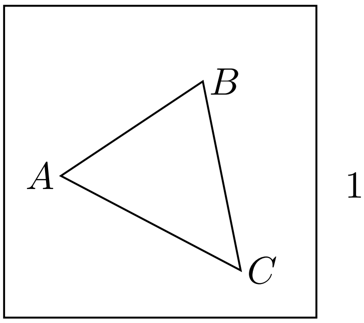
Slumpmässig triangel.

Figur 5

Två punkter P och Q väljs på måfå på en stav av längden 1. Staven bryts i dessa punkter. Vad är sannolikheten att man kan bilda en triangel av de tre erhållna bitarna.

UPPGIFT 8. Utforma ett datorprogram som genomför detta försök t ex 1000 gånger och som bestämmer antalet gånger som man kan bilda en triangel av de tre erhållna sträckorna. Den observerade relativa frekvensen är en skattning av sannolikheten för triangel.

Tre punkter i kvadrat.



Figur 6

Betrakta försöket att slumpmässigt välja tre punkter A, B och C i en kvadrat med sidan 1 och bestämma arean T av triangeln ABC.

Uppgift 9. Simulera detta försök t ex 1000 gånger och beräkna medelvärdet av de erhållna triangelareorna.

Uppgift 10. Betrakta det slumpmässiga försöket ovan. Skatta med simulering sannolikheten att den erhållna triangeln ABC är trubbvinklig.

Litteratur

Råde, L., *Simulering.* Studentlitteratur, Stockholm 1987.